Matrizen

9. Mathe Nacht

1. Aufgabe: (*Invertierbarkeit und Rang*)

Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \; C := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

sowie die Produktmatrizen

$$(AB)^2, CC^T \text{ und } BC.$$

Bestimme den Rang dieser Matrizen. Welche der Matrizen sind invertierbar?

2. Aufgabe: (*Inverse einer Matrix*)

Seien $\mathbb{R}$ ein Körper. Entscheide, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$$

invertiebar ist und berechne für $a = 2$ das Inverse von A.

3. Aufgabe: (*Rang von Matrizen*)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Bestimme $a \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A^{-1})$.

4. Aufgabe: (*Rang von Matrizen*)

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & a \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 1 & b & 3 \\ 3 & 1 & b \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimme den Rang der Matrizen (in Abhängikeit der Parameter a und b).

5. Aufgabe: (*Bild und Kern von Matrizen*)

Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Bestimme das Bild und den Kern der Matrizen A, A^T, B und B^T.

6. Aufgabe: (*symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen*)

Zeige :

a) Für jede Matrix A ist $A^T A$ symmetrisch.

b) Für jede quadratische Matrix A ist $A + A^T$ symmetrisch und $A - A^T$ schiefsymmetrisch.

c) Das Produkt zweier symmetrischer Matrizen A und B ist genau dann symmetrisch, wenn $AB = BA$ gilt.

7. Aufgabe: (*Wahr oder Falsch*)

Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründe!

a) Die inverse Matrix einer invertierbaren, symmetrischen Matrix ist wieder symmetrisch.

b) Aus der Invertierbarkeit einer Matrix A folgt stets die Invertierbarkeit von A^T.

c) Die Summe invertierbarer Matrizen ist stets invertierbar.

d) Das Produkt invertierbarer Matrizen ist stets invertierbar.

8. Aufgabe: (*Ähnliche und äquivalente Matrizen*)

Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$. Zeige:

a) Falls ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ existiert so, dass $B = S^{-1}AS$ ist, dann sind A und B äquivalent.

b) Falls ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ existiert so, dass $B = S^{-1}AS$ ist, dann gilt det(A)=det(B)

Gilt die Umkehrung von *a*) und *b*)?

Lineare Gleichungssysteme

9. Mathe Nacht

1. Aufgabe:

Gegeben seien das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

sowie die Matrix $B := \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und der Vektor $c := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

a) Schreibe das Gleichungssystem in die Form $A\,x = b$ um und kennzeichne die *Koeffizientenmatrix* mit rot und den *Ergebnisvektor* mit grün. Ist hier ein homogenes oder ein inhomogenes Gleichungssystem gegeben?

b) Schreibe nun die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bestimme ihren Rang. Was kannst du jetzt über die Lösungsmenge sagen, ohne sie explizit zu berechnen? Ist das Gleichungssystem universell, d.h. für jeden beliebigen Ergebnisvektor aus dem $\mathbb{R}^3$, lösbar?

c) Nun einmal andersherum:
Schreibe das Gleichungssystem $B\,x = c$ mit einzelnen Gleichungen und Variablen x_1, x_2, x_3 hin.

d) Ist das Gleichungssystem aus c) lösbar, universell lösbar? Gebe in dem Fall der Lösbarkeit den Lösungsraum als affinen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ an.

2. Aufgabe:

Sei $t \in \mathbb{R}$. Gegeben seien die Linearen Gleichungssysteme

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & = & 8 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 5x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & tx_3 & = & 1 \end{array}$$

Bestimme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die vollständigen Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme und bestimme in c) die vollständige Lösungsmenge in Abhängigkeit von t.

3. Aufgabe:

Bestimme die reellen Zahlen a und b in der Koeffizientenmatrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ so, dass das lineare Gleichungssystem

a) $A\,x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lösbar ist!

b) $A\,x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ unlösbar ist, aber das lineare Gleichungssystem $A\,x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lösbar ist!

4. Aufgabe:

Gegeben sei das Lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Ist die Lösungsmenge des LGS ein $\mathbb{R}$-Teilraum von $\mathbb{R}^3$?

b) Falls die Lösungsmenge ein $\mathbb{R}$-Teilraum ist, welche Dimension hat dieser dann?

c) Bestimme eine Koeffizientenmatrix A so, dass die Lösungsmenge von $A\,x = 0$ ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-Teilraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

Determinanten

9. Mathe Nacht

1. Aufgabe:

Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$.

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründe deine Antwort jeweils kurz.

a) $\mathrm{Rang}(A) = 2$.

b) Die einzige Lösung des LGS $A\,x = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) $\det(A + B) = 0$.

d) $\det(AB) = 0$ und $\det(BA) = 0$.

2. Aufgabe:

Berechne die Determinanten folgender Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, ohne nach einer Zeile oder Spalte zu entwickeln.

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & i & 32 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 16 \\ 8 & 5 & 5 & i \\ 0 & 64 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

ohne nach einer Zeile oder Spalte zu entwickeln. Gib die Lösung als $2-$er Potenz an.

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & e & \pi \\ f & x & 5 \\ g & 5 & y \end{pmatrix}$

und finde für f, g, x und y Werte so, dass $\det(D) = 0$ gilt.

3. Aufgabe:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}(2n, \mathbb{R})$ mit $(a_{ij}) = \begin{cases} (-1)^i, & \text{wenn } i = j \\ 1, & \text{wenn } i \text{ ungerade und } j = i+1 \\ 1, & \text{wenn } j \text{ ungerade und } i = j+1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Berechne $\det(A)$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\det(A)$ positiv?

4. Aufgabe:

Löse folgende Aufgaben unter Verwendung der Cramerschen Regel!

a) Finde alle $a \in \mathbb{R}$ so, dass $A\,x = b$ mit der Cramerschen Regel (Satz 7.34) lösbar ist und gib alle Lösungen an! Dabei ist

$$A := \begin{pmatrix} 2 & a & 7 \\ a & 2 & 7 \\ 7 & a & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}.$$

b) Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$f(x, y, z, t) = (x - z + 3t, y + z - 2t, 2z - 2t, t).$$

Bestimme die Urbilder der Standardeinheitsvektoren im $\mathbb{R}^4$ unter f.

Eigenwerttheorie

9. Mathe Nacht

1. Aufgabe:

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{R})$$

a) Bestimme die Eigenwerte von A!

b) Begründe, warum A diagonalisierbar ist!

c) Bestimme eine Basis von $\mathbb{R}^4$, die aus Eigenvektoren von A besteht!

d) Gib eine Matrix W an, für die $W^{-1}AW$ eine Diagonalmatrix ist. Wie sieht diese Diagonalmatrix aus?

2. Aufgabe:

Es sei $C := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 27 & -2 & -49 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -101 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(6, \mathbb{R})$

a) Gib drei Eigenwerte von C an!

b) Entscheide (mit Begründung), welche der folgenden Vektoren Eigenvektoren von C sind!

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, v_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T,$$
$$v_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, v_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

3. Aufgabe:

Es sei $B := \begin{pmatrix} 4 & a-1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimme, für welche Zahlen $a \in \mathbb{R}$ die Matrix B diagonalisierbar ist!

4. Aufgabe:

a) Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ und A habe den Eigenwert $3i$. Weiter sei w ein Eigenvektor zum Eigenwert $3i$. Zeige, dass dann auch jedes Vielfache $\lambda \cdot w$, mit $\lambda \in \mathbb{C}$, ein Eigenvektor zu $3i$ ist!

b) Es sei $B \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{R})$ und 0 sei ein Eigenwert von B. Zeige, dass dann der Rang von $B - 4E$ (E ist die Einheitsmatrix in $\mathrm{Mat}(4, \mathbb{R})$) maximal 3 ist! Welche Eigenwerte hat B, wenn $\mathrm{Rang}(B - 4E) = 0$ ist?